Leçon 260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Développements :

Processus de Galton-Watson, Théorème de Weierstrass par les probabilités.

Bibliographie :

Barbe Ledoux, Candelpergher probabilités, Ouvrard.

Rapport du jury :

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments (décroissance des L^p). Le candidat peut citer — mais doit surtout savoir retrouver rapidement — les espérances et variances de lois usuelles, notamment Bernoulli, binômiale, géométrique, Poisson, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebychev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique. Pour aller plus loin, le comportement des moyennes pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. Pour les candidats suffisamment à l'aise avec ce sujet, l'espérance conditionnelle pourra aussi être abordée.

Remarque 1 (Barbe Ledoux p 53)**.** *Cadre : On considère des variables aléatoires à valeurs réelles, définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, A, \mathbb{P})$

1 Espérance d'une variable aléatoire

1.1 Définitions

Définition 2 (Barbe p56)**.** *Définition de l'espérance. On dit qu'une variable aléatoire admet un moment d'ordre* 1 *si elle est intégrable par rapport à* $\mathbb{P}$.

Définition 3 (Barbe p56)**.** *Variable aléatoire centrée.*

Exemple 4 (Barbe p56)**.** *Espérance d'une va constante.*

Théorème 5 (Barbe p56)**.** *Théorème de transport.*

Corollaire 6 (Barbe p57)**.** *Nouvelle expression de l'espérance.*

Remarque 7. *L'espérance est linéaire.*

Exemple 8 (Barbe p57)**.** *Espérance d'une indicatrice.*

Proposition 9 (Barbe p59)**.** *Inégalité de Jensen.*

Exemple 10. $E[X]^2 \leq E[X^2]$.

Proposition 11 (Barbe p61)**.** *Inégalité de Markov.*

Définition 12 (Barbe p64)**.** *Espérance d'un vecteur aléatoire.*

Proposition 13 (Ouvrard p9)**.** *Identification de la loi d'une va.*

1.2 Espérance des lois usuelles

Proposition 14 (Candel p107)**.** *Expression de l'espérance dans le cas discret.*

Exemple 15 (Ouvrard 1 p243)**.** *Exemples de la loi uniforme, de la loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson.*

Proposition 16 (Candel p108)**.** *Expression de l'espérance dans le cas à densité.*

Exemple 17 (Ouvrard 1 p244)**.** *Exemples de la loi uniforme, la loi normale, loi exponentielle.*

Contre exemple 18 (Ouvrard 1 p244)**.** *Contre-exemple de la loi de Cauchy.*

1.3 Indépendance et espérance

Définition 19 (Barbe p80)**.** *Variables aléatoires indépendantes.*

Proposition 20 (Barbe p83)**.** *Caractérisation de l'indépendance en fonction de l'espérance.*

Exemple 21 (Candel p194)**.**

Corollaire 22 (Barbe p84)**.** *Si* $X_1, ..X_n$ *sont indépendantes et intégrables alors l'espérance du produit est le produit des espérances.*

Contre exemple 23 (Candel p161)**.** *Si* X *suit une loi* $B(1/2)$, $Y = 1 - X$, *on a* $E[XY] = 0 \neq 1/4 = E[X]E[Y]$.

Contre exemple 24 (Barbe p80)**.** X *suit une loi uniforme sur* $[-1, 1]$, $X_2 = X_1^2$, $E[X_1X_2] = 0 = E[X_1]E[X_2]$ *mais non indépendantes.*

2 Moments de variables aléatoires

2.1 Moments d'ordre p

Définition 25. *Soit X variable aléatoire réelle, $p \in \mathbb{N}^*$, on dit que X admet un moment d'ordre p si X^p est intégrable.*

Proposition 26 (Barbe p59)**.** *Inégalité de Hölder.*

Proposition 27 (Barbe p59)**.** *L'application $p \to (E[|X|^p]^{1/p})$ est croissante. (Inclusions des L^p.)*

Proposition 28 (Ouvrard p16)**.** *Inégalité de Minkowski.*

Corollaire 29. *Si X admet un moment d'ordre p, alors pour tout $q \leq p$, X admet un moment d'ordre q.*

Remarque 30. *Comme $L^p \subset L^q$, la convergence L^q implique la convergence L^p.*

Proposition 31 (Barbe p61)**.** *Expression de $E[X^p]$. Caractérisation de $E[X]$ fini.*

2.2 Variance et covariance, exemples

Définition 32 (Barbe p60)**.** *Si X admet un moment d'ordre 2, définition de sa variance et de l'écart type.*

Proposition 33 (Barbe p60)**.** *Autre expression de la variance.*

Définition 34 (Candel p113)**.** *Si $Var(X) > 0$, on appelle variable centrée réduite la variable $(X - E(X))/\sigma(X)$. Elle est de moyenne nulle et de variance 1.*

Proposition 35. *Une autre écriture de la variance, de contenu plus géométrique, est en terme de norme dans l'espace de Hilbert L^2 mesurant la distance de X à son espérance : $\sigma(X) = ||X - E[X]||_2$.*

Exemple 36 (Barbe p60)**.** *Si $Var(X) = 0$ alors X est ps constante, égale à sa moyenne $E[X]$.*

Variance d'une loi binomiale, variance d'une loi normale centrée réduite.

Proposition 37 (Barbe p60)**.** *$Var(X + a) = Var(X)$, $Var(aX) = a^2 Var(X)$.*

Exemple 38 (Barbe p60)**.** *Si X suit $N(m, \sigma^2)$ alors $Var(X) = \sigma^2$ et $\sigma(X) = \sigma$.*

Proposition 39 (Barbe p62)**.** *Inégalité de Tchebychev.*

Définition 40 (Barbe p64)**.** *[Ouvrard 2 p20][Candel p171] Covariance pour deux va.*

Exemple 41 (Barbe p64)**.**

Proposition 42 (Candel p172)**.** *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Proposition 43 (Ouvrard 2 p20)**.** *$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X, Y)$.*

Proposition 44 (Ouvrard 2 p22)**.** *[Candel p172] Matrice de covariance de $AX + b$.*

2.3 Moments, corrélation et indépendance

Définition 45 (Barbe p84)**.** *Variables non corrélées.*

Proposition 46 (Barbe p84)**.** *Deux va indépendantes sont non corrélées. (Orthogonales dans L^2).*

Proposition 47 (Barbe p84)**.** *Identité de Bienaymé.*

Application 48 (Barbe p85)**.** *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

Application 49. *Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein.*

Contre exemple 50 (Barbe p84)**.** *Si X suit une loi normale centrée réduite alors X et $Y = X^2$ sont non corrélées mais ne sont pas indépendantes.*

Proposition 51 (Ouvrard 2)**.** *[Barbe p107] Si la matrice de covariance d'un vecteur gaussien est diagonale (ie les composantes de X sont deux à deux non corrélées), alors les composantes du vecteur sont mutuellement indépendantes.*

Exemple 52 (Barbe p60)**.** *Variance d'une loi binomiale.*

Application 53 (Candel p173)**.** *Coefficient de corrélation et droite de régression. (Régression linéaire).*

3 Utilisation des moments

3.1 Fonction génératrice

Définition 54 (Candel p219)**.** *[Ouvrard 1 p138] Fonction génératrice.*

Proposition 55 (Ouvrard 1 p139)**.** *Propriétés des fonctions génératrices.*

Exemple 56 (Ouvrard 1 p139)**.** *Fonctions génératrices d'une loi binomiale, d'une loi de poisson.*

Proposition 57 (Ouvrard 1 p140)**.** *G_{X+Y} si X et Y sont indépendantes.*

Proposition 58 (Ouvrard 1 p141)**.** *Caractérisation d'un moment d'ordre r en fonction des fonctions génératrices.*

Proposition 59. *Processus de Galton-Watson.*

3.2 Fonction caractéristique

Définition 60 (Barbe p65). *[Candel p210] Fonction caractéristique.*

Proposition 61 (Barbe p66). *[Candel p210] Les fonctions caractéristiques caractérisent la loi.*

Exemple 62 (Barbe p66). *[Candel p211] Fonctions caractéristiques d'une loi binomiale, d'une loi de Poisson, d'une loi normale.*

Proposition 63 (Barbe p68). *Liens entre régularité et existence des moments.*

Proposition 64 (Barbe p70). *Si ϕ_X est analytique dans un voisinage de 0 alors la loi est caractérisée par ses moments. La réciproque est souvent fausse, sauf si la loi est à valeurs dans un intervalle borné.*

Théorème 65. *Théorème de Lévy. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires.*

— *Si $(X_n)_n$ converge en loi vers X, alors $(\phi_{X_n})_n$ converge simplement vers ϕ_X.*

— *Si $(\phi_{X_n})_n$ converge simplement vers ϕ continue en 0, alors ϕ est la fonction caractéristique d'une variable X et X_n converge en loi vers X.*

3.3 Théorèmes limites

Proposition 66. *Loi forte des grands nombres.*

Application 67 (Candel p310). $\frac{f(X_1)+\ldots+f(X_n)}{n} \to \int f \mathrm{d}\mu$.

Théorème 68. *Théorème central limite.*

Exemple 69. *Exemples poissonniens.*